郑州大学学报(自然科学版)
JOURNAL OF ZHENGZHOU UNIVERSITY

第 27 卷　第 1 期 (1995,3)
Vol. 27　No. 1　(1995,3)

复数域上二元超越扩张的若干性质*

熊胜利　曾宪权

(郑州大学系统科学与数学系　郑州　450052)

摘要　讨论复数域上超越扩域的代数扩张是研究一般域扩张的重要途径. 本文考虑了如下的问题:设 u 是 C 上超越元, $u^k + t^e = a, a \neq 0, a \in$ C, 则代数扩张 $C(u,t)/C(u^n,t^n)$ 具有何种性质. 证明了对于某些三元组 (k,e,n), $C(u,t)=C(u^n,t^n)$.

关键词　代数扩域;超越扩域;超越元

中图分类号　O 153.1

众所周知,复数域是代数闭域,那么为了讨论一般特征零代数扩域的性质,通常采取的办法是首先在复数域上添加若干超越元,得到复数域的一个超越扩域 E,再做 E 的某个子域 F,使 E 为 F 上的代数扩张.

本文讨论复数域 C 的二元超越扩张的性质. 以下 C 表示复数域,u 为 C 上超越元.

若 t 为 C 上与 u 代数无关的超越元,则易知 u^n, t^n 也为 C 上代数无关的超越元,但 $C(u,t)$ 为 $C(u^n,t^n)$ 的代数扩张,且 $[C(u,t):C(u^n,t^n)]=n^2$;若 $u^k \pm t^e = a$, $0 \neq a \in$ C, $k,e \in \mathcal{N}$,那么 t 与 u 在 C 上是代数相关的. 本文讨论在此情况下,代数扩张 $C(u,t)/C(u^n,t^n)$ 的性质,其主要结果为

定理　设 u 为 C 上的超越元,$u^k \pm t^e = a$, $0 \neq a \in$ C, $k,e \in \mathcal{N}$,则 t 也是 C 上超越元且与 u 线性无关. 又令 $E=C(u,t)$, $F=C(u^n,t^n)$, $n \in \mathcal{N}$, $n>1$,则有

(1)若 $k=e$, $(k,n)=1$,则 $E=F(u)$;

(2)若 $k=e=2$,则当 n 为偶数时,$E \neq F$;

(3)若 $k=e=2^m$, $m \in \mathcal{N}$,则对于 $n=2l+1$, $l \in \mathcal{N}$,有 $E=F$;

(4)若 $k=2^m$, $e=2^p$, $m,p \in \mathcal{N}$,则当 $n=3$ 或 5 时,有 $E=F$.

我们通过以下一系列命题来证明上述定理. 因为 C 是代数闭域且 $a \neq 0$,故只要对 $u^k + t^e = 1$ 的情况进行讨论即可.

命题 1　若 $u^k + t^e = 1$, $k,e \in \mathcal{N}$,则 t 也是 C 上的超越元.

证明　若 t 是代数元,那么 $C(t)$ 是 C 的有限单扩张,设 $[C(t):C]=s$, $s \in \mathcal{N}$. $\because t^e \in C(t)$, $\therefore 1, t^e, (t^e)^2, \cdots, (t^e)^s$ 线性相关,故存在 C 上非零次多项式 $f(x)$, t^e 为 $f(x)$ 的根,也就是说 t^e 是 C 上代数元. 故 $u^k = 1 - t^e$ 亦是 C 上代数元,所以 u 也是代数元,与 u 是超越元矛盾,所以 t

* 河南省科委自然科学基金资助项目

来稿时间:1994-10-15

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

是C的超越元.

命题2　设$u^k+t^e=1$,$k,e\in\mathcal{N}$,则u,t,在C上线性无关.

证明　设u,t线性相关,则存在不全为0的复数l_1,l_2,使$l_1u+l_2t=0$,不妨设$l_2\neq0$,则有$u^k+\left(-\frac{l_1}{l_2}\right)u^e=1$,$\therefore u$是C上代数元,矛盾.故$u$与$t$在C上线性无关.

命题3　设$u^k+t^k=1$,$k\in\mathcal{N}$.记$F=C(u^n,t^n)$,其中$n\in\mathcal{N}$,$n>1$.若$(k,n)=1$,则$C(u,t)=F(u)$.

证明　$\because t^k=1-u^k$,$\therefore t^k\in F(u)$.又$\because(k,n)=1$,故存在整数s,l使$ks+nl=1$,$\therefore t=t^{ks+nl}=(t^k)^s\cdot(t^n)^l\in F(u)$,从而$C(u,t)\subset F(u)$.又显然$F(u)$是$C(u,t)$的子域,故$C(u,t)=F(u)$.

注　命题3对于u,t代数无关的情况不成立.这是因为Char $C(u,t)=0$,此时$C(u,t)$亦是F的单扩张,但$C(u,t)\neq F(u)$.例如令$F=C(u^3,t^3)$,则$C(u,t)=F(u+t)$,显然$F(u+t)\neq F(u)$.

命题4　设$u^2+t^2=1$,则$C(u,t)\neq C(u^{2l},t^{2l})$,$l\in\mathcal{N}$.

证明　我们先证明$C(u,t)\neq C(u^2,t^2)$.若$C(u,t)=C(u^2,t^2)$,则$u\in C(u^2,t^2)$,$\therefore u=\frac{f(u^2,t^2)}{g(u^2,t^2)}$,其中:

$$f(u^2,t^2)=f(u^2,1-t^2)=\sum_{i=0}^{s}a_iu^{2i},s\in Z,s\geqslant0,a_s\neq0,$$

$$g(u^2,t^2)=\sum_{j=0}^{m}b_ju^{2j},m\in Z,m\geqslant0,b_m\neq0,a_i,b_j\in C,$$

这样我们有　$u\left(\sum_{j=0}^{m}b_ju^{2j}\right)=\sum_{i=0}^{s}a_iu^{2i}$,$\therefore u$是C上一个$2s$次或$2m+1$次多项式的根,矛盾.$\therefore u\overline{\in}C(u^2,t^2)$,从而$C(u,t)\neq C(u^2,t^2)$.

又$C(u^{2l},t^{2l})$为$C(u^2,t^2)$的子域,$\therefore C(u,t)\neq C(u^{2l},t^{2l})$.

引理　设$u^k+t^k=1$,$m\in\mathcal{N}$则$u^{k(2l+1)}+t^{k(2l+1)}$可以看作是u^kt^k的一个不超过l次的多项式,其中$l\in\mathcal{N}$.

证明　我们对l进行归纳.

$l=1$时,$u^{3k}+t^{3k}=(u^k+t^k)(u^{2k}-u^kt^k+t^{2k})=(u^k+t^k)^2-3u^kt^k=1-3u^kt^k$为$u^kt^k$的一次多项式.

$l=2$时,$u^{5k}+t^{5k}=(u^{3k}+t^{3k})(u^{2k}+t^{2k})-u^{3k}t^{2k}-u^{2k}t^{3k}=(1-3u^kt^k)(1-2u^kt^k)-u^{2k}t^{2k}(u^k+t^k)=1-5u^kt^k+5u^{2k}t^{2k}$为${}^kt^k$的二次多项式.

现设结论对于不超过$2l+1$的奇数成立,$l\geqslant2$,我们来看$2l+3$的情况:

$u^{k(2l+3}+t^{k(2l+3)}=[u^{k(2l+1)}+t^{k(2l+1)}](u^{2k}+t^{2k})-u^{k(2l+1)}t^{2k}-u^{2k}t^{k(2l+1)}=[u^{k(2l+1)}+t^{k(2l+1)}](1-2u^kt^k)-u^{2k}t^{2k}[u^{k(2l-1)}+t^{k(2l-1)}]$,由归纳假设,$u^{k(2l+1)}+t^{k(2l+1)}$与$u^{k(2l-1)}+t^{k(2l-1)}$分别为$u^kt^k$的不超过$l$次与$l-1$次的多项式.故$u^{k(2l+3)}+t^{k(2l+3)}$为$u^kt^k$的不超过$l+1$次的多项式.

推论　设$u^k+y^k=1$,$k\in\mathcal{N}$,则$u^{k(2l+1)}+t^{k(2l+1)}$可以分别看作为u^k与t^k的不超过$2l$次的多项式,其中$l\in\mathcal{N}$.

命题5　设$u^k+t^k=1$,$k=2^m$,$m\in\mathcal{N}$,则对任奇数$n=2l+1$,$l\in\mathcal{N}$,有$C(u,t)=C(u^n,t^n)$.

证明　记$E=C(u,t)$,$F=C(u^n,t^n)$,$n=2l+1$,我们对l进行归纳.

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$l=1$ 时，$\because u^{3k}+t^{3k}=1-3u^kt^k$，$\therefore u^kt^k\in C(u^3,t^3)$. 现记 $k=3q+r,q,r\in\mathcal{N},1\leqslant r\leqslant 2$. 则 $u^rt^r=\frac{u^kt^k}{(u^3)^q(t^3)^q}\in C(u^3,t^3)$ 且 $u^{3-r}t^{3-r}\in C(u^3,t^3)$，$\therefore ut\in C(u^3,t^3)$.

又 $u^3+t^3=(u+t)(1-3ut),u^3-t^3=(u-t)(1-ut)$. $\therefore u\pm t\in C(u^3,t^3)$，从而 $u,t\in C(u^3,t^3)$. 故 $l=1$ 时结论成立.

现假定对于小于 $2l+1$ 的奇数结论成立，$l\geqslant 2$. 我们来观察 $n=2l+1$ 的情况. 由推论，在 F 上存在一个不超过 $2l$ 次的多项式以 u^k 为根，$\therefore u^k$ 是 F 上的代数元. 设 $g(x)\in F[x]$ 为 u^k 的极小多项式，则 $deg\ g(x)=s\leqslant 2l$. 同理 t^k 也为 F 上的代数元，其极小多项式的次数为同一自然数 s.

为方便起见，令 $A_1=u^k,A=A_1^{2l+1}$，则 $A=(u^{2l+1})^k\in F$. 又设 $h(x)=x^{2l+1}-A$，则 $h(x)$ 是 F 上的多项式，且 u^k 是 $h(x)$ 的根，故　$g(x)\mid h(x)$.

将 u^k 添加到 F 上，那么 $h(x)$ 在 $F(u^k)$ 上可分解为：　$h(x)=(x-A_1)(x-A_1\varepsilon)\cdots(x-A_1\varepsilon^{2l})$，其中 $1=\varepsilon^0,\varepsilon,\cdots,\varepsilon^{2l}$ 是 $2l+1$ 次单位根. 把 $g(x)$ 看作为 $F(u^k)$ 上的多项式，则由 $g(x)\mid h(x)$ 得出

$$g(x)=(x-A_1\varepsilon^{i_1})(x-A_1\varepsilon^{i_2})\cdots(x-A_1\varepsilon^{i_s}).$$

$\because g(x)$ 的常数项为 $(-1)^sA_1^s\varepsilon^{i_1+i_2+\cdots+i_s}$，$\therefore A_1^s\in F$. 同理，对同一个 $s\leqslant 2l$，有 $(t^k)^s\in F$.

若 $2^ms<2l+1$，则 $u^{2l+1-2^ms}=\frac{u^{2l+1}}{A_1^s}\in F$，同理 $t^{2l+1-2^ms}\in F$，又由归纳假设，$E=C(u^{2l+1-2^ms},t^{2l+1-2^ms})$，故 $u,t\in F$，从而 $E=C(u,t)=F$.

若 $2^ms>2l+1$，则可记 $2^ms=(2l+1)q_1+r_1$，其中 $q_1,r_1\in\mathcal{N}$ 且 $0\leqslant r_1<2l+1$. 我们说 r_1 一定不等于 0，否则有 $2^ms=(2l+1)q_1$，$\therefore 2^m\mid q_1$，记 $q_1=2^mh,h\in\mathcal{N}$，则有 $s=(2l+1)h$，但 $s\leqslant 2l$，矛盾. $\therefore r_1\neq 0$. 若 r_1 为奇数，由归纳假定，$E=C(u^{r_1},t^{r_1})$，而 $u^{r_1}=\frac{A_1}{(u^{2l+1})q_1}\in F$，同理 $t^{r_1}\in F$，$\therefore u,t\in F$，故 $E=F$. 若 r_1 为非 0 偶数，由归纳假定，$E=C(u^{2l+1-r_1},t^{2l+1-r_1})$，而 $u^{2l+1-r_1}=\frac{(u^{2l+1})q_1+1}{A_1}\in F$，同理 $t^{2l+1-r_1}\in F$，$\therefore u,t,\in F$，从而 $E=F$.

综上所述，当 $u^{2^m}+t^{2^m}=1$ 时 $(m\in\mathcal{N})$，对一切奇数 $n=2l+1,l\in\mathcal{N}$，有 $C(u,t)=C(u^n,t^n)$.

命题 6　设 $u^k+t^e=1,k=2^m,e=2^p,m,p\in\mathcal{N}$，则 $C(u,t)=C(u^3,t^3)$.

证明　记 $F=C(u^3,t^3),k_1=2^{m-1},e_1=2^{p-1}$.

$\because u^{3k}+t^{3e}=(u^k+t^e)(u^{2k}-u^kt^e+t^{2e})=1-3u^kt^e\in F$，$\therefore u^kt^e\in F$. 下证 $u^{k_1}t^{e_1}\in F$.

记 $2^m=3q_1+r_1,2^p=3q_2+r_2,q_1,q_2,r_1,r_2\in Z$ 且 $1\leqslant r_1,r_2\leqslant 2$，$\therefore u^{r_1}t^{r_2}=\frac{u^kt^e}{(u^3)^{q_1}(t^3)^{q_2}}\in F$. 我们分 4 种情况讨论：

(i) m,p 同为偶数，此时必有 $r_1=r_2=1$，$\therefore ut\in F$. 又此时 $m-1,p-1$ 为奇数，故有

$$k_1=2^{m-1}=3h_1+2,e_1=2^{p-1}=3h_2+2,h_1,h_2\in Z,$$

$$\therefore u^{k_1}t^{e_1}=(u^3)^{h_1}(t^3)^{h_2}(ut)^2\in F.$$

(ii) m,p 同为奇数，则必有 $r_1=r_2=2$，$\therefore u^2t^2\in F,ut\in F$. 又此时 $m-1,p-1$ 同为偶数，故有

$$k_1=2^{m-1}=3h_1+1,e_1=2^{p-1}=3h_2+1,h_1,h_2\in Z,$$

$$\therefore u^{k_1}t^{e_1}=(u^3)^{h_1}(t^3)^{h_2}(ut)\in F.$$

(iii) m 为偶数，p 为奇数，则必有 $r_1=1,r_2=2$，$\therefore ut^2\in F,u^2t\in F$. 又此时 $k_1=3h_1+2,e_1=$

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$3h_2+1, h_1, h_2\in Z$, $\therefore u^{k_1}t^{e_1}=(u^3)^{h_1}(t^3)^{h_2}(u^2t)\in F$.

(iv)m 为奇数,p 为偶数,则必有 $r_1=2, r_2=1$, $\therefore u^2t\in F$,同(iii)可证 $u^{k_1}t^{e_1}\in F$.

又 $u^{3k_1}+t^{3e_1}=(u^{k_1}+t^{e_1})(1-3u^{k_1}t^{e_1})\in F$, $\therefore u^{k_1}+t^{e_1}\in F$,同理 $u^{k_1}-t^{e_1}\in F$, $\therefore u^{k_1}, t^{e_1}\in F$. 若 m 为偶数,则 $u^2=u^{k_1-3h_1}\in F$, $\therefore u\in F$;若 m 为奇数,则 $u=u^{k_1-3h_1}\in F$. 同理,$t\in F$. 从而有

$$C(u,t)=C(u^3,t^3).$$

命题 7　设 $u^k+t^e=1$, $k=2^m$, $e=2^p$, $m,p\in\mathcal{N}$,则 $C(u,t)=C(u^5,t^5)$.

证明　记 $F=C(u^5,t^5)$, $k_1=2^{m-1}$, $e_1=2^{p-1}$

$\because u^{5k}+t^{5e}=(u^{3k}+t^{3e})(u^{2k}+t^{2e}-u^{3k}t^{2e}-u^{2k}t^{3e}=(1-3u^kt^e)(1-2u^kt^e)-u^{2k}t^{2e}=1-5u^kt^e+5u^{2k}t^{2e}\in F$, $\therefore u^{2k}t^{2e}-u^kt^e\in F$. 现记 $u^{2k}t^{2e}-u^kt^e=b$, $b\in F$.

又 $u^{5k}-t^{5e}=(u^{3k}+t^{3e})(u^{2k}-t^{2e})+u^{3k}t^{2e}-uu^{2k}t^{3e}$

$=(1-3u^kt^k)(u^k-t^e)+u^{2k}t^{2e}(u^k-t^e)$

$=(u^k-t^e)(1-3u^kt^e+u^{2k}t^{2e})=(u^k-t^e)[(b+1)-2u^kt^e]$,

$\therefore (u^{5k}-t^5)^2=(1-4u^kt^e)[(b+1)^2-4(b+1)u^kt^e+4u^{2k}t^{2e})$

$=(1-4u^kt^e)[(b^2+6b+1)-4bu^kt^e]$

$=(b^2+6b+1)-4(b^2+7b+1)u^kt^e+16bu^{2k}t^{2e}$

$=(17b^2+6b+1)-4(b^2+3b+1)u^kt^e\in F$.

若 $b^2+3b+1=0$,则 $b=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}\in C$, $\therefore u^kt^e$ 为 C 上方程 $x^2-x-b=0$ 的根,$\therefore u^kt^e\in F$.

下面证明 $u^{k_1}t^{e_1}\in F$,并由此得出 $u,t\in F$.

记 $k=2^m=5q_1+r_1$, $e=2^p=5q_2+r_2$,其中 $q_1,q_2,r_1,r_2\in Z$ 且 $1\leqslant r_1,r_2\leqslant 4$, $\therefore u^{r_1}t^{r_2}=\dfrac{u^kt^e}{(u^5)^{q_1}(t^5)^{q_2}}\in F$. 我们对 $m.p$ 分几种情况进行讨论.

(i)$m\equiv 0(4)\equiv p$,此时必有 $2^m\equiv 1(5)\equiv 2^p$ 且 $k_1\equiv 3(5)\equiv e_1$,所以 $r_1=r_2=1$,从而 $u^{r_1}t^{r_2}=ut\in F$.

记 $k_1=5h_1+3$, $e_1=5h_2+3$, $h_1,h_2\in Z$,则 $u^{k_1}t^{e_1}=(u^5)^{h_1}(t^5)^{h_2}(ut)^3\in F$.

又 $\because u^{5k_1}+t^{5e_1}=(u^{k_1}+t^{e_1})(1-u^{k_1}t^{e_1}+u^{2k_1}t^{2e_1})\in F$, $u^{5k_1}-t^{5e_1}=(u^{k_1}-t^{e_1})(1+u^{k_1}t^{e_1}-u^{2k_1}t^{2e_1}\in F$, $\therefore u^{k_1}\pm t^{e_1}\in F$,从而 $u^{k_1}, t^{e_1}\in F$. 此时 $u^3=u^{k_1-5h_1}\in F$, $\therefore u=\dfrac{(u^3)^2}{u^5}\in F$. 同理 $t\in F$. 故得到 $C(u,t)=F$.

(ii)$m\equiv 1(4)\equiv p$,此时必有 $2^m\equiv 2(5)\equiv 2^p$, $2^{m-1}\equiv 1(5)\equiv 2^{p-1}$;

$m\equiv 2(4)\equiv p$,此时必有 $2^m\equiv 4(5)\equiv 2^p$, $2^{m-1}\equiv 2(5)\equiv 2^{p-1}$;

$m\equiv 3(4)\equiv p$,此时必有 $2^m\equiv 3(5)\equiv 2^p$, $2^{m-1}\equiv 4(5)\equiv 2^{p-1}$.

类似于(i)的证明,都可以得出 $u^{k_1}t^{e_1}\in F$,且可以证明 $u,t\in F$.

(iii)$m\equiv 0(4)$, $p\equiv 1(4)$,则 $2^m\equiv 1(5)$, $2^p\equiv 2(5)$, $2^{m-1}\equiv 3(5)$, $2^{p-1}\equiv 1(5)$, $\therefore r_1=1, r_2=2$,故 $ut^2\in F$, $u^3t=\dfrac{(ut^2)^3}{t^5}\in F$, $\therefore u^{k_1}t^{e_1}=(u^5)^{h_1}(t^5)^{h_2}(u^3t)\in F$. 由(i)的证明方法可得出 $u^{k_1}, t^{e_1}\in F$ 且可证明 $u^3, t\in F$,故 $u,t\in F$.

(iv)$m\equiv i(4)$, $p\equiv j(4)$, $0\leqslant i\neq j\leqslant 3$,类似于(i),(iii)的证明可得出 $u^{k_1}, t^{e_1}\in F$ 且可证明 $u,t\in F$.

综上所述,若 $u^{2^m}+t^{2^p}=1$, $m,p\in\mathcal{N}$,则 $C(u,t)=C(u^5,t^5)$.

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

定理的证明：由命题 1－4 及命题 5－7，定理得证．

附注　我们猜测

(1)设 $u^k+t^k=1$，$F=C(u^m,t^n)$，$k,m\in\mathcal{N}$，$n>1$．若 $C(u,t)=F(u)$，则 $(k,n)=1$．

(2)设 $u^{2^m}+t^{2^r}=1$，则 $C(u,t)=C(u^{2l+1},t^{2l+1})$，$l\in\mathcal{N}$．

参 考 文 献

1　曾炯之著；黄建华译．函数域上的代数．格丁根大学学报，见：曾炯博士纪念文集，南昌：江西科学技术出版社，1994．15～47

2　Jacobson N. Basic Algebra I. W. H. Freeman and Company，1974

3　莫宗坚等．代数学(上)．北京：北京大学出版社，1986

ON PROPERTY OF EXTENSION FIELD WITH TWO VARIABLES OVER COMPLEX NUMBER FIELD C

Xiong Shengli　Zeng Xianquan

(*Department of System Science & mathematics, Zhengzhou University*)

Abstract　It is important to research the field extension by the way of discussing the algebraic extension over the transcendental extension field over **C**. In this paper we consider the following problem: Let u be a transcendemtal element over **C**, $u^k+t^e=a$, where $0\neq a\in\mathbf{C}$, then what can we say about the algebraic extension of $\mathbf{C}(u,t)/\mathbf{C}(u^s,t^n)$. We prove that for some triples (k,e,n), $\mathbf{C}(u,t)=\mathbf{C}(u^n,t^n)$.

Key Words　Algebraic extension field; Transcendental extension field; Transcendental element

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net